

УДК 519.6:517.677

ТЕОРИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ¹⁾

© 2003 г. А. В. Арутюнов*, А. Ф. Измаилов**

(* 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН;

** 119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК)

e-mail: * arutun@orc.ru; ** izmaf@ccas.ru

Поступила в редакцию 01.04.02 г.

Для задачи оптимизации с ограничениями типа равенств рассматривается случай, когда стандартное условие регулярности ограничений может нарушаться. В предположениях более слабых, чем те, которые использовались в существующей литературе, развивается достаточно полная локальная теория чувствительности для этого класса задач. Предлагаемые результаты включают оценки сверху и снизу на изменение значения минимума при параметрических возмущениях, а также описание асимптотического поведения решений возмущенных задач. Библ. 17.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Теория чувствительности (по отношению к возмущениям) – важнейший и активно развиваемый раздел теории оптимизации, оказывающий самое непосредственное влияние, в том числе и на развитие численных методов оптимизации. Систематическое изложение теории чувствительности для нормальных конечномерных задач содержится в [1]. Недавняя обзорная статья [2] достаточно хорошо отражает современное состояние этой науки, по крайней мере в рамках того общего подхода к проблеме, о котором идет речь ниже. В качестве альтернативы этому подходу отметим [3] и другие работы Леви, в которых предлагается анализ чувствительности, основанный на использовании различных обобщенных производных многозначных отображений, описывающих зависимость решений от параметра.

Пусть $\Sigma = \mathbb{R}^s$, $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^l$. Все рассмотрения ниже локальны, поэтому они легко распространяются на случай, когда Σ , X и Y – открытые множества в $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно. Возможность распространения приводимых результатов на бесконечномерный случай комментируется в разд. 5. Будем рассматривать задачу

$$f(\sigma, x) \rightarrow \min, \quad x \in D(\sigma), \quad (1.1)$$

$$D(\sigma) = \{x \in X \mid F(\sigma, x) = 0\}; \quad (1.2)$$

где $\sigma \in \Sigma$ – параметр, $f: \Sigma \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, $F: \Sigma \times X \rightarrow Y$ – гладкое отображение.

Пусть $\bar{x} \in X$ – локальное решение невозмущенной задачи

$$f(\bar{\sigma}, x) \rightarrow \min, \quad x \in D(\bar{\sigma}), \quad (1.3)$$

т.е. существует окрестность B точки $\bar{x}$ такая, что $\bar{x}$ является глобальным решением задачи

$$f(\bar{\sigma}, x) \rightarrow \min, \quad x \in D(\bar{\sigma}) \cap B. \quad (1.4)$$

Окрестность B будем предполагать замкнутой. Считая эту окрестность фиксированной, определим (локальную) функцию минимума задачи (1.1), (1.2) как

$$\omega(\sigma) = \inf_{x \in D(\sigma) \cap B} f(\sigma, x), \quad \sigma \in \Sigma$$

(если $D(\sigma) \cap B = \emptyset$, то $\omega(\sigma) = +\infty$; разумеется, ω зависит от выбора B). При этом $\omega(\bar{\sigma}) = f(\bar{\sigma}, \bar{x})$, и если B – компакт, то, как известно, функция ω полунепрерывна снизу в точке $\bar{\sigma}$. Дальнейший (в частности, количественный) анализ требует дополнительных предположений. Оценки воз-

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00334 и 01-01-00810).

возможного изменения значения функции минимума и самого решения при изменении параметра, а также асимптотики решений возмущенных задач и составляют предмет теории чувствительности.

Точка $\bar{x}$ называется *нормальной*, если $\lim_{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) = Y$, и *анормальной* в ином случае. Случай нормального локального решения задачи (1.3) освещен в литературе достаточно полно (см. [1], [2] и цитированную там литературу). В случае же возможной анормальности, которому главным образом и посвящена настоящая статья, вопросы чувствительности для задач оптимизации до сих пор исследовались лишь в единичных публикациях (см. разд. 5).

2. НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

Ниже приводятся две теоремы о существовании неявной функции, а также теорема об оценке расстояния до множества нулей нелинейного отображения. Эти теоремы, обобщающие классические результаты такого рода на анормальный случай, приводятся в формулировках, которые наиболее удобны для использования в вопросах теории чувствительности (в духе проблемы 1 из [1, с. 24]).

Дабы не заострять внимание на требованиях гладкости, всюду далее будем предполагать, что отображение F дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ и трижды дифференцируемо в этой точке по переменной x , причем $\bar{x} \in D(\bar{\sigma})$ (в этом разделе $\bar{x}$ не обязательно является локальным решением задачи (1.3)). В большинстве приводимых ниже утверждений такие требования гладкости избыточны; возможность ослабить эти требования комментируется в разд. 5. Обозначим через $P = P(\bar{\sigma}, \bar{x})$ ортопроектор на $\left(\lim_{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})\right)^\perp$ в Y и введем семейство линейных операторов

$$\Psi(\bar{\sigma}, \bar{x}; h) : X \rightarrow Y, \quad \Psi(\bar{\sigma}, \bar{x}; h)\xi = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})\xi + P \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[h, \xi], \quad h \in X,$$

отображение

$$\Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \cdot) : X \rightarrow Y, \quad \Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})\xi + \frac{1}{2} P \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[\xi, \xi]$$

и конус

$$T(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \{\xi \in X \mid \Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \xi) = 0\}.$$

Определение 1. Отображение F называется *2-регулярным по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по направлению $h \in X$* , если

$$\lim \Psi(\bar{\sigma}, \bar{x}; h) = Y.$$

Термин “по направлению” оправдан тем, что, как легко видеть, 2-регулярность по направлению h равносильна 2-регулярности по направлению th при любом числе $t \neq 0$.

Определение 2. Отображение F называется *2-регулярным по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$* , если оно 2-регулярно по x в этой точке по любому направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$, $h \neq 0$.

Теорема 1. Пусть отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ хотя бы по одному направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

Тогда $D(\sigma) \neq \emptyset$ для любого $\sigma \in \Sigma$, достаточно близкого к $\bar{\sigma}$, причем

$$\text{dist}(\bar{x}, D(\sigma)) = O\left(|\sigma - \bar{\sigma}| + \left|P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma})\right|^{1/2}\right), \quad (2.1)$$

где символ dist обозначает расстояние от точки до множества.

Приведенный результат получен в [4], [5, с. 75] на основе теоремы о накрывании из [6].

Далее, введем в рассмотрение конус $\mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ в Y , состоящий из таких элементов $y \in \left(\operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})\right)^\perp$, $y \neq 0$, для каждого из которых существует такое (зависящее от y) линейное подпространство $\Pi = \Pi(y) \subset X$, что

$$\Pi \subset \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \quad \operatorname{codim} \Pi \leq l,$$

$$\left\langle y, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[\xi, \xi] \right\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi.$$

Определение 3. Отображение F называется *2-нормальным по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$* , если конус $\operatorname{con} \mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ является острым, т.е. не содержит никакого ненулевого линейного подпространства (здесь con обозначает выпуклую оболочку множества).

Как показано в [7, с. 57], 2-нормальность является условием общего положения, если n достаточно велико по сравнению с l .

Теорема 2. Пусть отображение F 2-нормально по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем хотя бы для одного $h \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ справедливо

$$\left\langle y, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[h, h] \right\rangle < 0 \quad \forall y \in \mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{x}). \quad (2.2)$$

Тогда $D(\sigma) \neq \emptyset$ для любого $\sigma \in \Sigma$, достаточно близкого к $\bar{\sigma}$, причем имеет место оценка (2.1).

Теорема 2 доказана в [8]. Ее связь с теоремой 1 пока до конца не выяснена: существует гипотеза, что предположения теоремы 2 сильнее предположений теоремы 1, однако на сегодняшний день эта гипотеза доказана лишь при некоторых дополнительных предположениях (см. [8]). Поэтому ниже эти две теоремы рассматриваются как дополняющие друг друга.

Следующая оценка расстояния до множества нулей 2-регулярного отображения была получена в [6].

Теорема 3. Пусть отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

Тогда для $x \in X$, $x \neq \bar{x}$ имеет место формула

$$\operatorname{dist}(x, D(\sigma)) = O(|(I - P)F(\bar{\sigma}, x)| + |PF(\bar{\sigma}, x)|/|x - \bar{x}|), \quad (2.3)$$

где $I: Y \rightarrow Y$ — тождественное отображение.

Обратимся к задаче (1.1), (1.2). Введем функцию Лагранжа этой задачи:

$$L: \Sigma \times X \times \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(\sigma, x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(\sigma, x) + \langle \lambda, F(\sigma, x) \rangle.$$

Всюду далее предполагаем, что функция f непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ и дважды дифференцируема по переменной x в этой точке. Введем множество

$$\Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \left\{ (\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times Y \mid \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}, \lambda_0, \lambda) = 0, (\lambda_0, \lambda) \neq 0 \right\}$$

множителей Лагранжа и множество

$$\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \left\{ \lambda \in Y \mid \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) = 0 \right\} = \{ \lambda \in Y \mid (1, \lambda) \in \Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x}) \}$$

нормальных множителей Лагранжа, отвечающих точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

Как известно, необходимое условие первого порядка локальной оптимальности точки $\bar{x}$ в задаче (1.3) состоит в том, что $\Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$. Если точка $\bar{x}$ нормальна, то выполняется более сильное условие $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$ (в этом случае $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по необходимости является одноточечным мно-

жеством). Если же точка $\bar{x}$ аномальна, то $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ может быть пусто, а условие $\Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$ выполняется автоматически, просто в силу аномальности. Содержательные необходимые условия локальной оптимальности аномальной точки получены в [7], [9]–[11].

Наряду с предположением нормальности, известен ряд более слабых условий, обеспечивающих непустоту конуса $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$. Например, заведомо $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$, если отображение F 2-нормально по x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, а отображение $F(\bar{\sigma}, \cdot)$ в точке $\bar{x}$ накрывает. В частности, нормальный множитель заведомо существует в предположениях теоремы 2, а также в предположениях теоремы 1, если к ее предположениям добавить условие 2-нормальности. Еще ряд условий, дополняя которыми предположения теоремы 1, можно гарантировать непустоту $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$, приведен в [7, с. 65]. Там же показано, что если число n переменных задачи достаточно велико по сравнению с числом l ее ограничений (в приложениях это обычно бывает именно так), то в общем положении имеет место $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$. Подчеркнем, что одних предположений теоремы 1 для существования нормального множителя недостаточно (см. примеры 1–3 ниже).

Обратимся к достаточным условиям второго порядка оптимальности (о необходимых условиях второго порядка и их связи с достаточными см. [7]).

Определение 4. Будем говорить, что для задачи (1.3) в ее допустимой точке $\bar{x}$ выполнено условие квадратичного роста, если существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$f(\bar{\sigma}, x) \geq f(\bar{\sigma}, \bar{x}) + \gamma|x - \bar{x}|^2 \quad (2.4)$$

для любого $x \in D(\bar{\sigma})$, достаточно близкого к $\bar{x}$.

Очевидно, условие квадратичного роста подразумевает, что $\bar{x}$ доставляет строгий локальный минимум в задаче (1.3).

Теорема 4. Пусть $\Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$ и

$$\forall \xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \quad \xi \neq 0, \quad \exists (\lambda_0, \lambda) \in \Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x}) : \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, \lambda_0, \lambda) \xi, \xi \right\rangle > 0. \quad (2.5)$$

Тогда для задачи (1.3) в точке $\bar{x}$ выполнено условие квадратичного роста. Если $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$, то условие (2.5) равносильно условию

$$\forall \xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \quad \xi \neq 0, \quad \exists \lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) : \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle > 0. \quad (2.6)$$

Если, кроме того, отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, то условие (2.6) равносильно условию квадратичного роста.

Доказательство. Первое утверждение теоремы известно (ср. с теоремой 6.3 в [2]). Его доказательство осуществляется рассуждениями, аналогичными приведенным в [7, с. 44]. Докажем второе утверждение.

Пусть для данного $\xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ и пары $(\lambda_0, \lambda) \in \Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x})$ выполнено неравенство

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, \lambda_0, \lambda) \xi, \xi \right\rangle > 0.$$

Если $\lambda_0 > 0$, то

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda/\lambda_0) \xi, \xi \right\rangle > 0,$$

что и дает требуемое.

Пусть $\lambda_0 = 0$. Тогда, очевидно, $(t, \lambda + t\tilde{\lambda}) \in \Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x})$ для произвольного $\tilde{\lambda} \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ и любого $t \geq 0$, а с другой стороны,

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, t, \lambda + t\tilde{\lambda}) \xi, \xi \right\rangle > 0$$

для любого t , достаточно близкого к нулю. Тем самым все сведено к уже рассмотренному случаю $\lambda_0 > 0$.

Пусть, наконец, отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, выполнено условие квадратичного роста (2.4), причем $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$. Если $\xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$, но $\xi \notin T(\bar{\sigma}, \bar{x})$, то

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[\xi, \xi] \notin \operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}). \quad (2.7)$$

Далее, включение $(0, \lambda) \in \Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x})$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda \in \ker \left[\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \right]^T = \left(\operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \right)^\perp.$$

Отсюда и из (2.7) следует существование такого $\lambda \in Y$, что, с одной стороны, $(0, \lambda) \in \Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x})$, а с другой стороны,

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 0, \lambda) \xi, \xi \right\rangle = \left\langle \lambda, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[\xi, \xi] \right\rangle > 0.$$

Таким образом, для данного ξ выполнено неравенство (2.5), а значит, по доказанному, и (2.6).

Пусть теперь $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$, $\xi \neq 0$. Тогда, применяя теорему 3 при $x = \bar{x} + t\xi$, $t \geq 0$, получаем существование отображения $r: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ такого, что для $t \geq 0$ имеют место формулы

$$\bar{x} + t\xi + r(t) \in D(\bar{\sigma}), \quad |r(t)| = o(t).$$

Для любого $\lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ и любого достаточно малого $t \geq 0$ в силу (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \gamma t^2 |\xi|^2 + o(t^2) &\leq f(\bar{\sigma}, \bar{x} + t\xi + r(t)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) = f(\bar{\sigma}, \bar{x} + t\xi + r(t)) + \langle \lambda, F(\bar{\sigma}, \bar{x} + t\xi + r(t)) \rangle - \\ &- f(\bar{\sigma}, \bar{x}) - \langle \lambda, F(\bar{\sigma}, \bar{x}) \rangle = L(\bar{\sigma}, \bar{x} + t\xi + r(t), 1, \lambda) - L(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle t^2 + o(t^2), \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle > 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в условиях (2.5) и (2.6) вместо $\ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ можно использовать более узкий конус $T(\bar{\sigma}, \bar{x})$; однако, как установлено в доказательстве теоремы 4, такое ослабление достаточных условий второго порядка является чисто формальным.

Кроме того, если $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \emptyset$, то условие (2.5) выполняется тогда и только тогда, когда $T(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \{0\}$. Действительно, если $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$, то

$$\Lambda_0(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \left\{ (0, \lambda) \in \mathbb{R} \times Y \mid \lambda \in \left(\operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \right)^\perp, \lambda \neq 0 \right\}$$

и для любых $\lambda \in \left(\operatorname{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \right)^\perp$ и $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$ справедливо равенство

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 0, \lambda) \xi, \xi \right\rangle = \left\langle \lambda, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[\xi, \xi] \right\rangle = 0,$$

поскольку

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x})[\xi, \xi] \in \text{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}).$$

Как легко вывести из теоремы 3, равенство $T(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \{0\}$ подразумевает изолированность допустимой точки $\bar{x}$ задачи (1.3). Очевидно, этот случай слишком специфичен, поэтому далее в качестве достаточного условия второго порядка оптимальности используется (2.6), а не (2.5).

3. ОЦЕНКИ СВЕРХУ И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Материал этого раздела относится к проблемам 2–4 из [1, с. 24].

Для каждого $\sigma \in \Sigma$ обозначим через $S(\sigma)$ множество (глобальных) решений задачи

$$f(\sigma, x) \longrightarrow \min, \quad x \in D(\sigma) \cap B. \quad (3.1)$$

Теорема 5. Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

1) отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ хотя бы по одному направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$;

2) отображение F 2-нормально по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем хотя бы для одного $h \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ справедливо (2.2).

Тогда функция ω полунепрерывна сверху в точке $\bar{\sigma}$. Если же, кроме того, B – компакт, то $S(\sigma) \neq \emptyset$ для любого $\sigma \in \Sigma$, достаточно близкого к $\bar{\sigma}$, причем

$$\sup_{x \in S(\sigma)} \text{dist}(x, S(\bar{\sigma})) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \longrightarrow \bar{\sigma}, \quad (3.2)$$

и, в частности, функция ω непрерывна в точке $\bar{\sigma}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из теорем 1 и 2. Остальное доказывается стандартным образом (рассуждением от противного и применением уже доказанного первого утверждения теоремы). Теорема доказана.

Если $\bar{x}$ доставляет строгий локальный минимум в задаче (1.3), то окрестность B можно выбрать так, чтобы $\bar{x}$ было единственным решением задачи (1.4). Тогда $S(\bar{\sigma}) = \{\bar{x}\}$ и, в предположении о компактности B , (3.2) принимает вид

$$\sup_{x \in S(\sigma)} |x - \bar{x}| \longrightarrow 0, \quad \sigma \longrightarrow \bar{\sigma}. \quad (3.3)$$

Далее, в предположениях теоремы 5, из (2.1) вытекает оценка

$$\omega(\sigma) \leq \omega(\bar{\sigma}) + O\left(|\sigma - \bar{\sigma}| + \left|P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma})\right|^{1/2}\right) = \omega(\bar{\sigma}) + O(|\sigma - \bar{\sigma}|^{1/2}),$$

однако она является весьма грубой. Для получения более тонкой оценки фиксируем произвольное направление $d \in \Sigma$ и будем рассматривать в пространстве Σ луч $\bar{\sigma} + td$, $t \geq 0$. Оценка (2.1) свидетельствует о том, что если выполнены предположения теоремы 1 или теоремы 2, то можно ожидать, что у задачи (1.1), (1.2) при $\sigma = \bar{\sigma} + td$ существуют допустимые точки вида $\bar{x} + t^{1/2}\xi + o(t^{1/2})$, где $\xi \in X$ не зависит от $t \geq 0$. Непосредственно проверяется, что, по необходимости, $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$, где

$$T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) = \left\{ \xi \in X \mid \Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \xi) = -P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})d \right\}. \quad (3.4)$$

Доказать обратное применением теорем 1, 2 не удастся, но нужный факт может быть установлен непосредственно.

Теорема 6. Пусть отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по направлению $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$ для заданного $d \in \Sigma$.

Тогда найдутся окрестность $\mathcal{U}$ точки d и отображение $\chi: \mathcal{U} \rightarrow X$ такие, что верно следующее:

а) для $\zeta \in \mathcal{U}$ имеет место

$$\chi(\zeta) \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; \zeta), \quad \chi(\zeta) \rightarrow \xi \text{ при } \zeta \rightarrow d;$$

б) найдется отображение $r: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U} \rightarrow X$ такое, что для $t \geq 0$ и $\zeta \in \mathcal{U}$ выполняется включение

$$\bar{x} + t^{1/2} \chi(\zeta) + r(t, \zeta) \in D(\bar{\sigma} + t\zeta),$$

причем

$$|r(t, \zeta)| = O(t) \text{ равномерно по } \zeta \in \mathcal{U}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Сначала для заданного $\zeta \in \Sigma$ рассмотрим уравнение

$$\Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \chi) = -P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \zeta$$

относительно $\chi \in X$. Применяя к этому уравнению стандартной (для регулярного случая) теоремы о существовании неявной функции (см., например, [5, с. 28], [12, с. 161]) в точке $\chi = \xi$ при $\zeta = d$, получаем утверждение а) для некоторых окрестности $\mathcal{U}$ точки d и отображения $\chi: \mathcal{U} \rightarrow X$.

Теперь рассмотрим отображение $G: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U} \times X \rightarrow Y$, задаваемое следующим образом: для $\zeta \in \mathcal{U}$, $r \in X$ и $t > 0$

$$G(t, \zeta, x) = t^{-1/2} (I - P) F(\bar{\sigma} + t\zeta, \bar{x} + t^{1/2} (\chi(\zeta) + x)) + t^{-1} P F(\bar{\sigma} + t\zeta, \bar{x} + t^{1/2} (\chi(\zeta) + x)),$$

а для $t = 0$ отображение G нужно доопределить равенством

$$G(0, \zeta, x) = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) (\chi(\zeta) + x) + P \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}) [\chi(\zeta), x] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}) [x, x] \right).$$

Непосредственно проверяется, что если рассматривать $(t, \zeta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ в качестве параметра, то к отображению G в точке $(0, d, 0)$ вновь применима стандартная теорема о существовании неявной функции [5, с. 28], [12, с. 161], что и дает утверждение б) (возможно, для меньшей окрестности $\mathcal{U}$ точки d). Теорема доказана.

Из теоремы 6 в ее предположениях выводим оценку сверху на функцию минимума: для $t \geq 0$ и $\zeta \in \mathcal{U}$ выполняется соотношение

$$\omega(\bar{\sigma} + t\zeta) - \omega(\bar{\sigma}) \leq f(\bar{\sigma} + t\zeta, \bar{x} + t^{1/2} \chi(\zeta) + r(t, \zeta)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \chi(\zeta) \right\rangle t^{1/2} + O(t). \quad (3.6)$$

С учетом того, что в теореме 6 наряду с векторами ξ и $\chi(\zeta)$ можно взять $-\xi$ и $-\chi(\zeta)$ соответственно, будем выбирать знаки этих векторов так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \chi(\zeta) \right\rangle \leq 0.$$

Отсюда в силу (3.6) вытекает оценка

$$\omega(\bar{\sigma} + t\zeta) \leq \omega(\bar{\sigma}) + O(t) \text{ равномерно по } \zeta \in \mathcal{U}. \quad (3.7)$$

Лемма 1. Пусть отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ хотя бы по одному направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

Тогда для всякого $d \in \Sigma$ найдется такая точка $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$, что отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по направлению ξ .

Доказательство. Для заданного $d \in \Sigma$ и числа t рассмотрим уравнение

$$\Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \chi) = -t P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \zeta$$

относительно $\chi \in X$. Применением к этому уравнению стандартной теоремы о существовании неявной функции [5, с. 28], [12, с. 161] в точке $\chi = h$ при $t = 0$ получаем, что для любого t , достаточно близкого к нулю, это уравнение имеет такое решение $\chi(t)$, что $\chi(t) \rightarrow h$ при $t \rightarrow 0$. Тогда если число $t > 0$ достаточно мало, то отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по направлению $\chi(t)$, откуда, полагая $\xi = t^{-1/2}\chi(t)$, получаем требуемое. Лемма доказана.

Теорема 7. Пусть отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ хотя бы по одному направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

Тогда для $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$\omega(\sigma) \leq \omega(\bar{\sigma}) + O(|\sigma - \bar{\sigma}|). \quad (3.8)$$

Доказательство. Нужно утверждение получается рассуждением от противного с применением леммы 1 и оценки (3.7) (здесь существенна конечномерность Σ , а также равномерность оценки (3.7) по $\zeta \in \mathcal{U}$). Теорема доказана.

При дополнительном предположении о существовании отвечающего точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ нормального множителя Лагранжа (что, напомним, автоматически выполняется в предположениях теоремы 2) оценку (3.8) можно получить значительно проще, непосредственно из теорем 1 и 2. В частности, имеет место

Теорема 8. Пусть отображение F 2-нормально по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем хотя бы для одного $h \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ справедливо (2.2).

Тогда для $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка (3.8).

Доказательство. Согласно теореме 2, для любого $\sigma \in \Sigma$, достаточно близкого к $\bar{\sigma}$, существует такая точка $x(\sigma) \in D(\sigma)$, что $|x(\sigma) - \bar{x}| = O(|\sigma - \bar{\sigma}|^{1/2})$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ имеем

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) - \omega(\bar{\sigma}) &= f(\sigma, x(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) = f(\sigma, x(\sigma)) + \langle \lambda, F(\sigma, x(\sigma)) \rangle - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) - \langle \lambda, F(\bar{\sigma}, \bar{x}) \rangle = \\ &= L(\sigma, x(\sigma), 1, \lambda) - L(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda), \sigma - \bar{\sigma} \right\rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda)(x(\sigma) - \bar{x}), x(\sigma) - \bar{x} \right\rangle + o(|\sigma - \bar{\sigma}|) + o(|x(\sigma) - \bar{x}|^2) = O(|\sigma - \bar{\sigma}|). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Подчеркнем, что даже в нормальном случае оценка (3.8) качественно неулучшаема. С целью количественного уточнения этой оценки вернемся к анализу возмущений вдоль луча $\bar{\sigma} + td$, $t \geq 0$. Предположим, что для данного $d \in \Sigma$ отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по любому направлению $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$, т.е. $-P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})d$ не является критическим значением отображения $\Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \cdot)$ (на самом деле, достаточно, чтобы множество таких направлений ξ , по которым отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, было плотно в $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$). Напомним, что, в силу теоремы Сарда, множество критических значений отображения $\Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \cdot)$ имеет меру нуль [13, с. 239].

Введем в рассмотрение задачу

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \xi \right\rangle \rightarrow \min, \quad \xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d), \quad (3.9)$$

которую будем называть *первой присоединенной задачей*. Эта задача уже возникала в литературе (см. задачу $(\mathcal{PS}_d)$ в [2]), но использовалась лишь в ситуации, когда аномальность привносит только за счет ограничений-неравенств. Пусть

$$\omega_1(d) = \inf_{\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \xi \right\rangle$$

есть значение минимума в первой присоединенной задаче. Из (3.6) при $\zeta = d$ вытекает

Предложение 1. Пусть для данного $d \in \Sigma$ множество направлений $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$, по которым отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, является плотным в $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$.

Тогда для $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\omega(\bar{\sigma} + td) \leq \omega(\bar{\sigma}) + \omega_1(d)t^{1/2} + O(t), \quad (3.10)$$

причем если $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) \neq \emptyset$, то $\omega_1(d) \leq 0$.

Приведем пример, демонстрирующий неулучшаемость оценки (3.10) в предположениях предложения 1.

Пример 1. Пусть $s = 1, n = 3, l = 2, f(\sigma, x) = x_1, F_1(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, F_2(\sigma, x) = x_1x_3 - \sigma, \bar{\sigma} = 0, \bar{x} = 0$. Отображение F 2-регулярно по x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по любому направлению из $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) \forall d \in \Sigma, d \neq 0$.

Первая присоединенная задача (3.9) здесь совпадает с исходной задачей при $d = \sigma$ и, например, при $d > 0$ выполнены условия $\omega_1(d) = d^{-1/2}, \omega(\bar{\sigma} + td) = d^{-1/2}t^{1/2} \forall t \geq 0$ при любом выборе окрестности B .

Напомним, что, как следует из леммы 1, в предположениях теоремы 1 имеем $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) \neq \emptyset \forall d \in \Sigma$. С другой стороны, предположения теоремы 1 не гарантируют справедливости оценки (3.10).

Пример 2. Пусть $s = 1, n = 4, l = 3, f(\sigma, x) = x_1, F_1(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, F_2(\sigma, x) = x_1(x_1 - x_3 - x_3^3), F_3(\sigma, x) = x_3x_4 - \sigma, \bar{\sigma} = 0, \bar{x} = 0$. Здесь выполнены предположения теоремы 1: отображение F 2-регулярно по x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, например по направлению $h = (0, 1, 1, 0) \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

В то же время $\omega_1(d) = -\infty \forall d \in \Sigma, d \neq 0$, но $\omega(\sigma) = 0 \forall \sigma \in \Sigma$ при любом выборе окрестности B .

Если $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$, то, с одной стороны, по необходимости, $\omega_1(d) = 0$ для всякого $d \in \Sigma$ такого, что $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) \neq \emptyset$, а с другой стороны, оценку (3.10) в предложении (1) можно уточнить. Для этого введем в рассмотрение вторую присоединенную задачу

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}), d \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \xi, \xi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \eta \right\rangle \rightarrow \min, \quad (\xi, \eta) \in \mathcal{T}(\bar{\sigma}, \bar{x}; d),$$

$$\mathcal{T}(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) = \left\{ (\xi, \eta) \in X \times X \mid \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \xi = 0, \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}) d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}) [\xi, \xi] + \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \eta = 0 \right\},$$

которая также встречалась в литературе (см. задачу $(\mathcal{PL}_d)$ в [2]), но также только в контексте нормальности ограничений типа равенств. Для всякого $\lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ эту задачу несложными манипуляциями можно привести к виду

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda), d \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle \rightarrow \min, \quad \xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d), \quad (3.11)$$

с пониманием того, что значения целевой функции последней задачи в ее допустимых точках не зависят от выбора $\lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$. Пусть

$$\begin{aligned} \omega_2(d) &= \left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda), d \right\rangle + \frac{1}{2} \inf_{\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}), d \right\rangle + \inf_{(\xi, \eta) \in \mathcal{T}(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)} \left(\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \xi, \xi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \eta \right\rangle \right) \end{aligned}$$

есть значение минимума во второй присоединенной задаче.

Предложение 2. Предположим, что $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$. Пусть для данного $d \in \Sigma$ множество направлений $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$, по которым отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, является плотным в $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$.

Тогда для $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\omega(\bar{\sigma} + td) \leq \omega(\bar{\sigma}) + \omega_2(d)t + o(t). \quad (3.12)$$

Доказательство. Из теоремы 6 при $\zeta = d$ и любом $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$ таком, что F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, для $t \geq 0$ и произвольного $\lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ выводим

$$\begin{aligned} \omega(\bar{\sigma} + td) - \omega(\bar{\sigma}) &\leq f(\bar{\sigma} + td, \bar{x} + t^{1/2}\xi + r(t, d)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) = f(\bar{\sigma} + td, \bar{x} + t^{1/2}\xi + r(t, d)) + \\ &+ \langle \lambda, F(\bar{\sigma} + td, \bar{x} + t^{1/2}\xi + r(t, d)) \rangle - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) - \langle \lambda, F(\bar{\sigma}, \bar{x}) \rangle = L(\bar{\sigma} + td, \bar{x} + t^{1/2}\xi + r(t, d), 1, \lambda) - \\ &- L(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) = \left(\left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda), d \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle \right) t + o(t), \end{aligned}$$

откуда следует требуемое. Предложение доказано.

Неулучшаемость оценки (3.12) в предложении 2 иллюстрируется примером 4 ниже. Напомним, что в предположениях теоремы 1 имеем $\omega_2(d) < +\infty \forall d \in \Sigma$.

Еще раз поясним, что в этом разделе присоединенные задачи (3.9) и (3.11) использовались для получения оценок сверху на функцию минимума при возмущениях “по направлениям”. В предложении 3 ниже будет показано, что при некоторых дополнительных условиях оценка (3.12), получаемая с помощью второй присоединенной задачи, является точной, т.е. выполняется как равенство.

4. ОЦЕНКИ СНИЗУ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ

Получение оценок снизу на ω , а также оценок скорости сходимости в (3.2) или в (3.3) (в духе проблемы 7 из [1, с. 25]) требует дальнейших предположений, таких как условие квадратичного роста либо более сильное достаточное условие второго порядка оптимальности.

Теорема 9. Пусть отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем $T(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \{0\}$, и для задачи (1.3) в точке $\bar{x}$ выполнено условие квадратичного роста. Пусть окрестность B компактна и такова, что $\bar{x}$ – единственное решение задачи (1.4).

Тогда для $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$|x - \bar{x}| = O\left(\left(|\sigma - \bar{\sigma}| + \left|P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma})\right| |x - \bar{x}|^{-1}\right)^{1/2}\right) = O(|\sigma - \bar{\sigma}|^{1/3}) \text{ равномерно по } x \in S(\sigma). \quad (4.1)$$

Доказательство. Напомним, что, в силу теоремы 5, $S(\sigma) \neq \emptyset$ для любого $\sigma \in \Sigma$, достаточно близкого к $\bar{\sigma}$, причем в условиях доказываемой теоремы выполнено (3.3). Из теоремы 7 для $x = x(\sigma) \in S(\sigma)$ вытекает оценка

$$O(|\sigma - \bar{\sigma}|) \geq \omega(\sigma) - \omega(\bar{\sigma}) = f(\sigma, x(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) = f(\bar{\sigma}, x(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) + O(|\sigma - \bar{\sigma}|),$$

т.е.

$$f(\bar{\sigma}, x(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) \leq O(|\sigma - \bar{\sigma}|).$$

Поэтому, обозначая через $\tilde{x}(\sigma)$ произвольную проекцию точки $x(\sigma)$ на $D(\bar{\sigma})$ и используя условие квадратичного роста (2.4), имеем

$$\begin{aligned} \gamma |\tilde{x}(\sigma) - \bar{x}|^2 &\leq f(\bar{\sigma}, \tilde{x}(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) \leq f(\bar{\sigma}, \tilde{x}(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, x(\sigma)) + f(\bar{\sigma}, x(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) \leq \\ &\leq f(\bar{\sigma}, \tilde{x}(\sigma)) - f(\bar{\sigma}, x(\sigma)) + O(|\sigma - \bar{\sigma}|) = \\ &= O(|\sigma - \bar{\sigma}| + |\tilde{x}(\sigma) - x(\sigma)|) = O(|\sigma - \bar{\sigma}| + \text{dist}(x(\sigma), D(\bar{\sigma}))). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее, $x(\sigma) \in D(\sigma)$, поэтому, привлекая оценку (2.3) из теоремы 3, для $x(\sigma) \neq \bar{x}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{dist}(x(\sigma), D(\bar{\sigma})) &= O(|F(\bar{\sigma}, x(\sigma))| + |PF(\bar{\sigma}, x(\sigma))|/|x(\sigma) - \bar{x}|) = \\ &= O(|F(\sigma, x(\sigma)) - F(\bar{\sigma}, x(\sigma))| + |P(F(\sigma, x(\sigma)) - F(\bar{\sigma}, x(\sigma)))|/|x(\sigma) - \bar{x}|) = \\ &= O\left(|\sigma - \bar{\sigma}| + \left|P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma})\right| |x(\sigma) - \bar{x}|^{-1}\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда и из (4.2) вытекает равенство

$$|\tilde{x}(\sigma) - \bar{x}|^2 = O\left(|\sigma - \bar{\sigma}| + \left|P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma})\right| |x(\sigma) - \bar{x}|^{-1}\right),$$

из которого с учетом (4.3) получаем

$$\begin{aligned} |x(\sigma) - \bar{x}| &\leq |x(\sigma) - \tilde{x}(\sigma)| + |\tilde{x}(\sigma) - \bar{x}| = \text{dist}(x(\sigma), D(\bar{\sigma})) + |\tilde{x}(\sigma) - \bar{x}| = \\ &= O\left(\left(|\sigma - \bar{\sigma}| + \left|P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma})\right| |x(\sigma) - \bar{x}|^{-1}\right)^{1/2}\right) = O\left(\left(\frac{|\sigma - \bar{\sigma}|}{|x(\sigma) - \bar{x}|}\right)^{1/2}\right), \end{aligned}$$

что и дает (4.1). Теорема доказана. Является ли оценка (4.1) в предположениях теоремы 9 наилучшаемой (при $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$), авторам на сегодняшний день неизвестно.

Заметим, что предположения теоремы 9 содержат в себе предположения теоремы 1. В то же время отказаться в теореме 9 от условия 2-регулярности, ограничившись предположениями теоремы 1 и условием квадратичного роста, нельзя; в случае $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \emptyset$ это иллюстрируется примером 3, а в случае $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$ – примером 6 (см. ниже).

Пример 3. Пусть $s = 1, n = 3, l = 2, f(\sigma, x) = x_1 + x_2^2/2, F_1(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sigma, F_2(\sigma, x) = x_1(x_1 - x_3 - x_3^p), p \geq 3$ – нечетное число, $\bar{\sigma} = 0, \bar{x} = 0$. Здесь $D(\bar{\sigma}) = \{x \in X \mid x_1 = 0, x_2^2 = x_3^2\}$ и, как легко проверить, выполнены предположения теоремы 1 и условие квадратичного роста, а условие 2-регулярности F по x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ нарушается, например, по направлению $h = (1, 0, 1) \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

Можно показать, что при любом выборе окрестности B и любом достаточно малом $\sigma > 0$ множество $S(\sigma)$ состоит из единственного элемента $(x_1, 0, x_3)$, где $x_1 \approx x_3 \approx -(\sigma/2)^{1/(p+1)}, \omega(\sigma) \approx -(\sigma/2)^{1/(p+1)}$.

Невозможность отказаться в теореме 9 от условия квадратичного роста демонстрируется в примере 5 ниже (там $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$; соответствующий пример для случая $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \emptyset$ можно получить за счет введения дополнительной переменной).

Если предполагать непустоту $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$, то, согласно теореме 4, условие квадратичного роста можно заменить на достаточное условие (2.6). Более того, такая замена позволяет отказаться от условия 2-регулярности, а также уточнить оценку (4.1) и получить наилучшаемую оценку снизу на ω .

Теорема 10. Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

1) отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ хотя бы по одному направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$;

2) отображение F 2-нормально по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем хотя бы для одного $h \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ справедливо (2.2).

Пусть выполнено достаточное условие (2.6), окрестность B компактна и такова, что $\bar{x}$ – единственное решение задачи (1.4).

Тогда для $\sigma \in \Sigma$ имеют место оценки

$$\sup_{x \in S(\sigma)} |x - \bar{x}| = O(|\sigma - \bar{\sigma}|^{1/2}), \quad (4.4)$$

$$\omega(\sigma) = \omega(\bar{\sigma}) + O(|\sigma - \bar{\sigma}|). \quad (4.5)$$

Доказательство. Начнем с доказательства (4.4). Вновь из теоремы 5 имеем $S(\sigma) \neq \emptyset$ для любого $\sigma \in \Sigma$, достаточно близкого к $\bar{\sigma}$, причем выполнено (3.3). Из теорем 7 и 8 для $x \in S(\sigma) \subset D(\sigma)$

и любого $\lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} O(|\sigma - \bar{\sigma}|) &\geq \omega(\sigma) - \omega(\bar{\sigma}) = f(\sigma, x) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \\ &= f(\sigma, x) + \langle \lambda, F(\sigma, x) \rangle - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) - \langle \lambda, F(\bar{\sigma}, \bar{x}) \rangle = L(\sigma, x, 1, \lambda) - L(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) = \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda)(x - \bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle + O(|\sigma - \bar{\sigma}|) + o(|x - \bar{x}|^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Предположим обратное к (4.4): существуют последовательности $\{\sigma^k\} \subset \Sigma$, $\{\sigma^k\} \rightarrow \bar{\sigma}$ и $\{x^k\} \subset X$, $x^k \in S(\sigma^k)$, $x^k \neq \bar{x} \forall k$ такие, что

$$|x^k - \bar{x}|/|\sigma^k - \bar{\sigma}|^{1/2} \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Тогда тем более выполнено

$$|\sigma^k - \bar{\sigma}|/|x^k - \bar{x}| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

Для каждого k , учитывая, что $x^k \in D(\sigma^k)$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= F(\sigma^k, x^k) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma^k - \bar{\sigma}) + \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})(x^k - \bar{x}) + o(|\sigma^k - \bar{\sigma}|) + o(|x^k - \bar{x}|). \end{aligned}$$

Положим $\xi^k = (x^k - \bar{x})/|x^k - \bar{x}|$ и будем считать, что последовательность $\{\xi^k\}$ сходится к некоторому $\xi \in X$, $\xi \neq 0$. Тогда из последнего равенства и из (4.8) следует, что $\xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$.

Далее, в силу (2.6) найдется множитель $\lambda = \lambda(\xi) \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ такой, что

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda(\xi))\xi, \xi \right\rangle > 0,$$

откуда следует существование такого числа $\gamma > 0$, что

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda(\xi))(x^k - \bar{x}), x^k - \bar{x} \right\rangle \geq \gamma |x^k - \bar{x}|^2$$

для любого достаточно большого k . Отсюда и из (4.6) вытекает оценка

$$|x^k - \bar{x}| = O(|\sigma^k - \bar{\sigma}|^{1/2}),$$

что противоречит условию (4.7).

Оценка (4.5) следует теперь из (4.4) и промежуточных равенств в (4.6). Теорема доказана.

Вновь обратимся к анализу возмущений вдоль луча $\bar{\sigma} + td$, $t \geq 0$.

Предложение 3. Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

1) отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ хотя бы по одному направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$;

2) отображение F 2-нормально по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем хотя бы для одного $h \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ справедливо (2.2).

Пусть выполнено достаточное условие (2.6), окрестность B компактна и такова, что $\bar{x}$ — единственное решение задачи (1.4). Пусть, наконец, для данного $d \in \Sigma$ множество направлений $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$, по которым отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, является плотным в $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$.

Тогда для $t \geq 0$ имеет место оценка

$$\omega(\bar{\sigma} + td) = \omega(\bar{\sigma}) + \omega_2(d)t + o(t), \quad (4.9)$$

причем множество решений задачи (3.11) совпадает с множеством таких $\xi \in X$, для которых задача (3.1) при $\sigma = \bar{\sigma} + td$ имеет $o(t)$ -решение вида $\bar{x} + t^{1/2}\xi + o(t^{1/2})$.

Здесь для любых $\sigma \in \Sigma$ и числа $\varepsilon > 0$ под ε -решением задачи (3.1) понимается всякая точка $x \in D(\sigma) \cap B$, удовлетворяющая неравенству $f(\sigma, x) \leq \omega(\sigma) + \varepsilon$.

Доказательство. Используя оценку (4.4) из теоремы 10, для $t \geq 0$ имеем

$$|x - \bar{x}| = O(t^{1/2}) \text{ при } x \in S(\bar{\sigma} + td). \quad (4.10)$$

Отсюда для любого $x \in S(\bar{\sigma} + td) \subset D(\bar{\sigma} + td)$ и любого $\lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x})$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} \omega(\bar{\sigma} + td) - \omega(\bar{\sigma}) &= f(\bar{\sigma} + td, x) - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) = f(\bar{\sigma} + td, x) + \langle \lambda, F(\bar{\sigma} + td, x) \rangle - f(\bar{\sigma}, \bar{x}) - \langle \lambda, F(\bar{\sigma}, \bar{x}) \rangle = \\ &= L(\bar{\sigma} + td, x, 1, \lambda) - L(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) = \\ &= \left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda), d \right\rangle t + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda)(x - \bar{x}), x - \bar{x} \right\rangle + o(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Рассмотрим произвольные последовательности $\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{t_k\} \rightarrow 0$ и $\{x^k\} \subset X$, $x^k \in S(\bar{\sigma} + t_k d) \forall k$. Для каждого k , учитывая, что $x^k \in D(\sigma^k)$, и принимая во внимание (4.10), имеем

$$0 = F(\bar{\sigma} + t_k d, x^k) = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})(x^k - \bar{x}) + o(t_k^{1/2}),$$

$$0 = PF(\bar{\sigma} + t_k d, x^k) = P \left(t_k \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}) d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}) [x^k - \bar{x}, x^k - \bar{x}] \right) + o(t_k).$$

Положим $\xi^k = (x^k - \bar{x})/t_k^{1/2}$; в силу (4.10) можем считать, что последовательность $\{\xi^k\}$ сходится к некоторому $\xi \in X$. Тогда из последних двух равенств следует, что $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$.

Далее, из (4.11) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\omega(\bar{\sigma} + t_k d) - \omega(\bar{\sigma})]/t_k = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda), d \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle \geq \omega_2(d)$$

в силу включения $\xi \in T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d)$ и определения $\omega_2(d)$, что вместе с оценкой (3.12) из предложения 2 и дает (4.9).

Последнее утверждение предложения следует из доказанного и теоремы 6 (при $\zeta = d$). Предложение доказано.

Отметим, что, как нетрудно видеть, в предположениях предложения 3 задача (3.11) имеет решение и, в частности, $-\infty < \omega_2(d) < +\infty$. Формула (4.9) означает, что функция ω дифференцируема в точке $\bar{\sigma}$ по направлению d , причем для соответствующей производной по направлению имеет место равенство $\omega'(\bar{\sigma}; d) = \omega_2(d)$.

Неулучшаемость оценок (4.4) и (4.5) в теореме 10, а также справедливость равенства (4.9) в предложении 3 иллюстрирует

Пример 4. Пусть $s = 1$, $n = 2$, $l = 1$, a – фиксированное число, $f(\sigma, x) = (x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2)/2$, $F(\sigma, x) = x_1x_2 - \sigma$, $\bar{\sigma} = 0$, $\bar{x} = 0$. Здесь выполнены все предположения теоремы 10 и, кроме того, F 2-регулярно по x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по любому направлению $\xi \in X$ такому, что $\xi \neq 0$, а значит, по любому направлению из $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) \forall d \in \Sigma, d \neq 0$.

Вторая присоединенная задача (3.11) здесь совпадает с исходной задачей при $d = \sigma$ и $\omega(\bar{\sigma} + td) = \omega_2(td) = \omega_2(d)t \forall d \in \Sigma, \forall t \geq 0$, причем если $a \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\omega_2(d) \neq 0$. Заметим, что если $|a| > 1$, то величина $\omega_2(d)$ может быть как положительна, так и отрицательна, в зависимости от знаков a и d . Соответственно, $\omega(\sigma)$ может как расти, так и убывать с изменением $\sigma \in \Sigma$.

Следующие примеры демонстрируют невозможность отказаться в теореме 10 и предложении 3 от достаточного условия второго порядка оптимальности (2.6).

Пример 5. Пусть $s = l = 1$, $n = 2$, $f(\sigma, x) = |x_1|^p/p + |x_2|^q/q$, $p, q \geq 2$ – заданные числа, ограничения те же, что в примере 4, $\bar{\sigma} = 0$, $\bar{x} = 0$. Здесь выполнены все предположения теоремы 10, кроме (2.6), которое нарушается при $\max\{p, q\} > 2$.

Легко убедиться, что при любом выборе окрестности B и любом $\sigma \in \Sigma$, достаточно близком к нулю, для всякого $x \in S(\sigma)$ справедливы оценки

$$|x_1| = O(|\sigma|^{q/(p+q)}), \quad |x_2| = O(|\sigma|^{p/(p+q)}).$$

В частности, если $p > 2$, $q = 2$, то оценка (4.4) нарушается. Вместе с тем

$$\omega(\sigma) = O(|\sigma|^{pq/(p+q)}),$$

т.е. оценка (4.5) имеет место при любых $p, q \geq 2$.

Пример 6. Пусть $s = 1$, $n = 3$, $l = 2$, $f(\sigma, x) = -ax_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $a > 1$ – фиксированное число, ограничения те же, что в примере 3, $\bar{\sigma} = 0$, $\bar{x} = 0$. Здесь выполнены все предположения теоремы 10, кроме (2.6).

Можно показать, что при любом выборе окрестности B здесь нарушаются обе оценки: (4.4) и (4.5).

5. КОММЕНТАРИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

1. Обсудим вопрос о том, чему соответствуют полученные результаты в случае нормальности точки $\bar{x}$, т.е. при $\lim_{\bar{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}) = Y$. Покажем, что в предположении нормальности эти результаты превращаются в уже известные и, более того, могут быть частично усилены. Действительно, в нормальном случае $P = 0$ и отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по любому направлению $h \in X$ (не исключая $h = 0$). Кроме того, $\mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$, поэтому отображение F 2-нормально по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем (формально) выполнено (2.2). Теоремы 1 и 2 превращаются при этом в стандартную теорему о существовании неявной функции [5, с. 28], [12, с. 161], теорема 3 – в стандартную теорему об оценке расстояния до множества нулей [5, с. 33], [14, с. 41], а формулировка теоремы 4 упрощается следующим образом: условие квадратичного роста равносильно достаточному условию второго порядка

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \bar{\lambda})\xi, \xi \right\rangle > 0 \quad \forall \xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \quad \xi \neq 0, \quad (5.1)$$

где $\bar{\lambda} \in Y$ – однозначно отвечающий $\bar{x}$ нормальный множитель Лагранжа (т.е. $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \{\bar{\lambda}\}$).

В рассматриваемом случае теорема 5 соответствует теореме 3.1 и следствию 1 из [1, с. 255, 256], а теоремы 7 и 8 – предложению 3.1 из [1, с. 255]. Кроме того, для всякого $d \in \Sigma$ имеет место равенство $T(\bar{\sigma}, \bar{x}; d) = \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ и предложение 2 формально соответствует теореме 7.3 из [2].

Заметим, однако, что необходимое условие второго порядка локальной оптимальности точки $\bar{x}$ в задаче (1.3) в данном случае имеет вид

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \bar{\lambda})\xi, \xi \right\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x}).$$

Поэтому

$$\omega_2(d) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \bar{\lambda}), d \right\rangle + \frac{1}{2} \inf_{\xi \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \bar{\lambda})\xi, \xi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \bar{\lambda}), d \right\rangle, \quad (5.2)$$

и предложение 2 превращается в предложение 4.3 из [2] (см. также теорему 7.1 из [1, с. 272] и сопровождающее эту теорему замечание).

В силу сказанного выше о теореме 4, в случае нормального $\bar{x}$ теорема 9 поглощается теоремой 10, а последняя соответствует предложению 6.4 из [2]. Аналогично, предложение 3 формально соответствует теореме 7.4 из [2]. Подчеркнем, что в этом случае, согласно (4.9) и (5.2), $\omega'(\bar{\sigma}; d) = \omega_2(d)$ линейно зависит от d , поэтому функция ω имеет в точке $\bar{\sigma}$ производную Гато

$\omega'(\bar{\sigma}) = \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \bar{\lambda})$. Заметим, впрочем, что этот результат можно установить и не предполагая (5.1), а предполагая лишь, что $\bar{x}$ является строгим локальным решением задачи (1.3). Для этого нужно с помощью теоремы 1' о линеаризации семейств из [5, с. 30] свести (1.1), (1.2) к задаче оптимизации с постоянным допустимым множеством, после чего воспользоваться теоремой о дифференцируемости по направлениям функции минимума (теорема 4.1 из [2]).

Кроме того, комбинация условия нормальности точки $\bar{x}$ и достаточного условия второго порядка (5.1) позволяет применить к системе уравнений Лагранжа задачи (1.1), (1.2) классическую теорему о неявной функции, что приводит к гораздо более сильным утверждениям, чем те, которые можно получить из теоремы 10 и предложения 3 (заметим, что при выполнении (5.1) точная нижняя грань в (5.2) достигается на единственном элементе $\xi = 0$). А именно: для любого $\sigma \in \Sigma$, достаточно близкого к $\bar{\sigma}$, задача (1.1), (1.2) имеет в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ единственное локальное решение $x(\sigma)$, которому отвечает единственный нормальный множитель $\lambda(\sigma)$, причем отображения $x(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$ являются гладкими (см. предложение 5.2 из [2] и теорему 2 из [14, с. 310]) и можно выписать формулу для их производных.

2. Можно ли получить оценку снизу на ω без условия квадратичного роста? Известно, что в регулярном случае ответ на этот вопрос положителен (см. [15], а также теорему 4.5 из [2]). О возможности такого построения в контексте 2-регулярности косвенно свидетельствует тот факт, что в примере 6 условие 2-регулярности нарушено. С этой проблемой оказывается тесно связанной проблема устойчивости нормальных множителей в аномальных задачах, которая также исследована крайне мало. В связи с последним отметим недавнюю работу [16], где, в частности, показано, что при существовании устойчивого нормального множителя выполнение достаточного условия второго порядка порядка оптимальности с таким "универсальным" множителем обеспечивает линейную оценку на возмущение решения.

3. Весьма многообещающей (хотя и не очевидной) представляется перспектива распространения результатов теоремы 10 и предложения 3 на случай $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \emptyset$ за счет замены (2.6) достаточным условием второго порядка в терминах функции Лагранжа–Авакова [7, с. 81]. Кроме того, для полноты картины интересно было бы отдельно изучить не рассмотренный авторами случай, когда $T(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \{0\}$ (напомним, что если $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \emptyset$, то равенство $T(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \{0\}$ равносильно достаточному условию (2.5)).

4. Важнейшее направление дальнейшего развития полученных результатов состоит в их распространении на задачи оптимизации, в которых имеются ограничения типа неравенств. Такое обобщение авторы предполагают опубликовать.

5. Требование трехкратной дифференцируемости F в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ по переменной x существенно лишь в теоремах 6, 7 и в предложении 1. Кроме того, в некоторых из приведенных утверждений возможно и дальнейшее ослабление требований гладкости.

6. Вместо возмущений "по направлениям" можно рассматривать более общие возмущения вдоль дуг $\bar{\sigma} + td + \rho(t)$, $t \geq 0$, где отображение $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \Sigma$ таково, что $|\rho(t)| = o(t)$. Однако необходимо отметить следующую тонкость: если $\left| P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \rho(t) \right| \neq O(t^{3/2})$, то оценку (3.5) в соответствующем обобщении теоремы 6 даже при $\zeta = d$ следует заменить более слабой оценкой $|r(t, d)| = o(t^{1/2})$, что видно уже на простейшем примере, когда $s = n = l = 1$, $F(\sigma, x) = x^2 - \sigma$, $\bar{\sigma} = \bar{x} = 0$. Это приводит к ухудшению оценки (3.10) и в соответствующем обобщении предложения 1, где $O(t)$ также приходится заменить на $o(t^{1/2})$. Однако пример, в котором наблюдалось бы такое ухудшение последней оценки, авторам неизвестен.

7. Если пространство X бесконечномерно, то, как известно, как бы ни выбиралась окрестность B , функция ω может не быть полунепрерывной снизу. Более того, для $\sigma \in \Sigma$, сколь угодно близкого к $\bar{\sigma}$, может выполняться условие $\omega(\sigma) = -\infty$.

Пусть X – банахово пространство, а пространства Σ и Y по-прежнему конечномерны. Обсудим, как переформулировать в этом случае приведенные выше результаты. Теоремы 1 и 2 сохраняют силу полностью с заменой $|\cdot|$ на норму $\|\cdot\|$ в пространстве X , а в теореме 3 условие 2-регулярности нужно усилить следующим образом.

Определение 5. Отображение F называется *сильно 2-регулярным по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$* , если существует число $\nu > 0$ такое, что

$$\sup_{\substack{h \in T_{\nu}(\bar{\sigma}, \bar{x}) \\ \|h\| = 1}} \|(\Psi(\bar{\sigma}, \bar{x}; h))^{-1}\| < \infty,$$

где

$$T_{\nu}(\bar{\sigma}, \bar{x}) = \{\xi \in X \mid |\Phi(\bar{\sigma}, \bar{x}; \xi)| \leq \nu\}, \quad \|(\Psi(\bar{\sigma}, \bar{x}; h))^{-1}\| = \sup_{y \in Y, |y| = 1} \text{dist}(0, (\Psi(\bar{\sigma}, \bar{x}; h))^{-1}(y)).$$

Некоторые критерии выполнения условия сильной 2-регулярности получены в [17].

Теорема 5 сохраняет силу в части полунепрерывности функции ω сверху, т.е. без последнего утверждения. Остальные утверждения из разд. 3 сохраняются без каких-либо изменений.

Теорема 9 принимает следующий вид.

Теорема 9'. Пусть отображение F сильно 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем $T(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \{0\}$, и для задачи (1.3) в точке $\bar{x}$ выполнено условие квадратичного роста.

Тогда найдется окрестность U точки $\bar{x}$ такая, что для $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\| &= O\left(\left(|\sigma - \bar{\sigma}| + \left|P \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}, \bar{x})(\sigma - \bar{\sigma})\right| \|x - \bar{x}\|^{-1}\right)^{-1/2}\right) = \\ &= O(|\sigma - \bar{\sigma}|^{1/3}) \quad \text{равномерно по } x \in S(\sigma) \cap U. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что непустота $S(\sigma)$ при $\sigma \in \Sigma$ здесь не утверждается, как и в следующем аналоге теоремы 10, в котором (2.6) приходится заменить несколько более сильным условием.

Теорема 10'. Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

1) отображение F 2-регулярно по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ хотя бы по одному направлению $h \in T(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем $\Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) \neq \emptyset$;

2) отображение F 2-нормально по переменной x в точке $(\bar{\sigma}, \bar{x})$, причем хотя бы для одного $h \in \ker \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ справедливо (2.2).

Пусть, кроме того, существуют числа $M > 0$, $\nu > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\forall \xi \in T_{\nu}(\bar{\sigma}, \bar{x}), \quad \|\xi\| = 1, \quad \exists \lambda \in \Lambda(\bar{\sigma}, \bar{x}) : |\lambda| \leq M, \quad \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{\sigma}, \bar{x}, 1, \lambda) \xi, \xi \right\rangle \geq \gamma.$$

Тогда найдется окрестность U точки $\bar{x}$ такая, что для $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$\|x - \bar{x}\| = O(|\sigma - \bar{\sigma}|^{1/2}) \quad \text{равномерно по } x \in S(\sigma) \cap U.$$

Наконец, предложение 3, по-видимому, существенно конечномерно.

Теоремы 1, 3 и основанные на них результаты распространяются на случай бесконечномерных Σ и Y (нужно предположить замкнутость $\text{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$ и существование у этого подпространства замкнутого прямого дополнения, а в качестве P взять проектор на такое дополнение параллельно $\text{im} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\sigma}, \bar{x})$). Вместе с тем в теореме 2 существенна конечномерность Y .

Описанные обобщения на бесконечномерный случай получаются фактически дословным повторением приведенных выше рассуждений с очевидными изменениями.

В заключение отметим, что в случае бесконечномерного X требования гладкости функции f и отображения F можно ослабить, предполагая их гладкость относительно так называемой конечной топологии в X (см. [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитин Е.С. Теория возмущений в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1992.
2. Bonnans F., Shapiro A. Optimization problems with perturbations: a guided tour // SIAM Rev. 1998. V. 40. № 2. P. 228–264.
3. Levy A. Solution sensitivity from general principles // SIAM J. Control Optimizat. 2001. V. 40. № 1. P. 1–38.
4. Измаилов А.Ф. Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 1. С. 57–68.
5. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. 2-Регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Физматлит, 1999.
6. Аваков Е.Р. Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Матем. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 5. С. 3–13.
7. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
8. Арутюнов А.В. Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 3–26.
9. Третьяков А.А. Необходимые и достаточные условия оптимальности P -го порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 2. С. 203–209.
10. Аваков Е.Р. Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 5. С. 680–693.
11. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. Факторанализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
13. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. М.: Наука, 1995.
14. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
15. Lempio F., Maurer H. Differential stability in infinite-dimensional non-linear programming // Appl. Math. Optimizat, 1980. V. 6. P. 139–152.
16. Hager W.W., Gowda M.S. Stability in the presence of degeneracy and error estimation // Math. Program. 1999. V. 85. P. 181–192.
17. Арутюнов А.В. О свойствах квадратичных отображений в банаховом пространстве // Матем. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 4. С. 10–20.